Р Е Ш Е Н И Я О Л И М П И А Д Н Ы Х З А Д А Ч 2 0 1 5
I I к у р с

Задача 1 (6 баллов)

Известно, что человек имеет не более, чем 32 зуба. Доказать, что среди землян имеются хотя бы два человека с одним и тем же набором зубов (тот факт, что у новорождённых ещё не прорезались зубы, и другие анатомические закономерности не учитываются).

Решение

Для каждого из 32 зубов возможны два варианта: «Зуб есть» или «Зуба нет». Поэтому всего число наборов зубов $N = 2^{32} = 4\,294\,967\,296 \approx 4{,}3$млрд.

В начале 2014 года на 47-й сессии Комиссии ООН по народонаселению и развитию в докладе генсека ООН Пан Ги Муна было заявлено, что численность населения Земли достигла 7,2 млрд человек. Поэтому обязательно будут хотя бы два человека с одинаковым набором зубов (принцип Дирихле).

Ответ: доказано, что на Земле существуют хотя бы два человека с одинаковым набором зубов.

Задача 2 (4 балла)

При каких значениях *a* и *b* выполняется равенство $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{a \cdot \cos x - b}{1 - tg^2 x} = 1$?

Решение

Так как при $x = \dfrac{\pi}{4}$ знаменатель равен 0, то $a \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} - b = 0 \Rightarrow a\dfrac{\sqrt{2}}{2} - b = 0$.

Предполагаем, что числитель и знаменатель равны 0, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{a \cdot \cos x - b}{1 - tg^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-a \cdot \sin x}{-2 \cdot tgx \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{a \cdot \cos^3 x}{2} = \frac{a \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{a}{4\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

Следовательно $b = a\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4.$

Ответ: равенство выполняется при $a = 4\sqrt{2}$, $b = 4$.

Задача 3 (6 баллов)

Решить дифференциальное уравнение $x^2 y'' = (e^y - 2x)\cdot y'$ при $y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

<u>*Решение*</u>

Преобразуем: $x^2 y'' = (e^y - 2x)y' \quad \Rightarrow \quad x^2 y'' + 2xy' = e^y y' \quad \Rightarrow \quad (x^2 y')'_x = (e^y)'_x .$

Интегрируем полученное выражение: $x^2 y' = e^y + C_1 .$

Подставляем начальные условия: $1 \cdot 1 = e^0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$

Получаем $x^2 y' = e^y \quad \Rightarrow \quad e^{-y} dy = \dfrac{dx}{x^2} \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = -\dfrac{1}{x} + C_2 .$

Учтём начальные условия $-e^0 = -\dfrac{1}{1} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$

Получаем окончательное решение

$$-e^{-y} = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad e^{-y} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad -y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \ln x .$$

Ответ: $y = \ln x$

Задача 4 (6 баллов)

Вычислить определённый интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \log_3 \left(x + \sqrt{3^{|x|} + x^2}\right) dx.$

<u>*Решение*</u>

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \log_3 (x + \sqrt{3^{|x|} + x^2}) dx = [x = -t] = \int\limits_{1}^{-1} \log_3 (-t + \sqrt{3^{|t|} + t^2}) d(-t) = \int\limits_{-1}^{1} \log_3 (\sqrt{3^{|t|} + t^2} - t) dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \log_3 \left(\frac{\left(\sqrt{3^{|t|} + t^2} - t\right)\cdot\left(\sqrt{3^{|t|} + t^2} + t\right)}{\left(\sqrt{3^{|t|} + t^2} + t\right)} \right) dt = \int\limits_{-1}^{1} \log_3 \frac{3^{|t|}}{\sqrt{3^{|t|} + t^2} + t} dt = \int\limits_{-1}^{1} \left(\log_3 3^{|t|} - \log_3 \left(\sqrt{3^{|t|} + t^2} + t\right)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} |t| dt - \int\limits_{-1}^{1} \log_3 \left(\sqrt{3^{|t|} + t^2} + t\right) dt = 1 - I.$$

Получим возвратный интеграл $1 - I = I \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}5.$

Ответ: $I = 0{,}5.$

Задача 5 (5 баллов)

Найти кратчайшее расстояние между кривыми $y = x^2 + 3$ и $x = y^2 + 3$.

Решение

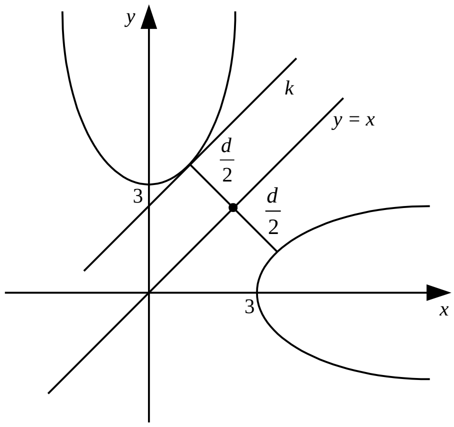

Рис. 1.

Построим кривые в плоскости *XOY*.

Заметим, что графики функций симметричны относительно прямой $y = x$. Следовательно, можно свести задачу к нахождению расстояния от прямой $y = x$ до одной из кривых (например, $y = x^2 + 3$).

Расстояние от прямой до кривой – это расстояние до касательной к кривой, параллельной исходной. Запишем уравнение касательной

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$
$$y - x_0^2 - 3 = 2x_0 \cdot (x - x_0)$$
$$y = 2x_0 \cdot x - x_0^2 + 3.$$

Так как касательная параллельна прямой $y = x$, то

$$2x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}.$$

Найдем расстояние от точки $\left(\frac{1}{2}; \frac{13}{4}\right)$ до прямой $x - y = 0$

$$\frac{d}{2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{13}{4}\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{11}{4\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{11\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: кратчайшее расстояние между кривыми равно $d = \frac{11\sqrt{2}}{4}$.

Задача 6 (5 баллов)

Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении числового выражения $\left(\sqrt{5} + \sqrt[3]{3}\right)^{22}$.

Решение

Воспользуемся формулой бинома Ньютона $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, получим

$$\left(5^{\frac{1}{5}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^{22} = \sum_{k=0}^{22} C_{22}^k \cdot 5^{\frac{22-k}{5}} \cdot 3^{\frac{k}{3}}.$$

Очевидно, что C_{22}^k - целое число, поэтому будет ли число рациональным, зависит от выражения $5^{\frac{22-k}{5}} \cdot 3^{\frac{k}{3}}$. Оно может быть рациональным, если $(22 - k)\,\vdots\,5$ и $k\,\vdots\,3$ одновременно. В первом случае $k = 2, 7, 12, 17, 22$, во втором - $k = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21$. Таким образом, выражение будет рациональным только при $k = 12$, то есть в разложении рациональным будет только один член.

Ответ: Один рациональный членов содержится в разложении.

Задача 7 (5 баллов)

В десятичной записи числа $n^2 + 2014n$ $(n \in N)$ последняя цифра равна 6. Найдите предпоследнюю цифру.

<u>*Решение*</u>

Выделим полный квадрат

$$n^2 + 2014n = n^2 + 2 \cdot n \cdot 1007 + 1007^2 - 1007^2 = (n + 1007)^2 - 1014049.$$

Так как последняя цифра записи числа 6, то $(n + 1007)^2$ оканчивается на 5, поэтому число $(n + 1007)$ тоже оканчивается на 5. Все квадраты чисел, оканчивающихся на 5, оканчиваются на 25. Поэтому вычитая из числа ххх…х25 число 1014049, получаем предпоследнюю цифру 7.

Ответ: <u>предпоследняя цифра записи 7.</u>

Задача 8 (9 баллов)

Четырёхмерный единичный куб ограничен гиперплоскостями $x_i = 0$, $x_i = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Определите, что получится в сечении, если он пересечён гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

<u>*Решение*</u>

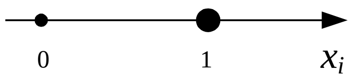

Рис. 2.

Найдем закономерность.

Рассмотрим одномерный случай при $n = 1$.

Гиперплоскость $x_1 = 1$, результат пересечения – точка (см. рис. 2)

Двумерный случай при $n = 2$.

Гиперплоскость $x_1 + x_2 = 1$. Результат пересечения – отрезок. При пересечении с координатными осями образуются точки (как в одномерном случае) (см. рис. 3).

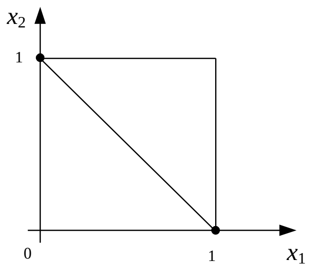

Рис. 3.

Трехмерный случай при $n = 3$.

Гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Результат пересечения – плоский треугольник. При пересечении с координатными плоскостями получаем отрезок (как в двумерном случае).

Можно предположить, что в четырехмерном случае будет фигура, при пересечении которой с координатными трехмерными пространствами, будут образованы плоские треугольники. Следовательно, фигура будет тетраэдром.

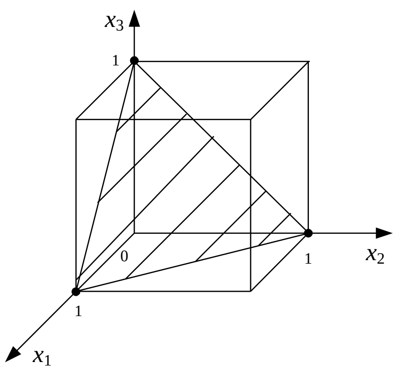

Рис. 4.

Ответ: <u>в сечении получится тетраэдр.</u>

Задача 9 (6 баллов)

Существует ли решение уравнения

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-2y+6z+10}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-4x-8y-6z+29}=6?$$

Если существует, то найдите хотя бы одно решение.

Решение

Преобразуем подкоренные выражения в левой части уравнения:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z+3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2}=6.$$

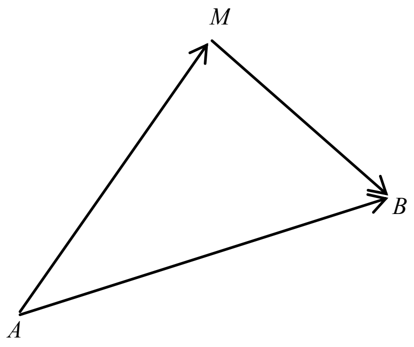

Рис. 5.

Первое слагаемое определяет расстояние от точки $M(x;y;z)$ до точки $A(0;1;-3)$. Второе – расстояние от точки $M(x;y;z)$ до точки $B(2;4;3)$. Таким образом, уравнение принимает вид $\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{BM}\right|=6.$ Вычислим расстояние AB: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+9+36}=7.$

Но по неравенству треугольников $\left|\overrightarrow{AM}\right|+\left|\overrightarrow{BM}\right|\geq 7,$ следовательно, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: уравнение не имеет решений.

Задача 10 (8 баллов)

В колоде 36 карт. Из неё извлекают пять карт. Найти вероятность того, что в этом наборе будут точно два короля, одна дама и одна карта пиковой масти.

Решение

Событие А – {В наборе из пяти карт будут точно два короля, одна дама и одна карта пиковой масти }.

Общее число исходов в данном опыте $N=C_{36}^5=376\,992.$

Вычислим благоприятные исходы:

1) два короля – не пиковые; одна дама – не пиковая; одна пиковая карта – не дама или король; одна карта – не король, не дама, не пики, то есть
$$M_1=C_3^2\cdot C_3^1\cdot C_7^1\cdot C_{21}^1=1323.$$
2) два короля – не пиковые; одна дама – пиковая; две карты – не пиковые, не дама, не король, то есть
$$M_2=C_3^2\cdot 1\cdot C_{21}^2=630.$$
3) один король – пиковый, один король – не пиковый; одна дама – не пиковая; две карты – не пиковые, не король, не дама, то есть
$$M_3=1\cdot C_3^1\cdot C_3^1\cdot C_{21}^2=1890.$$

Вычислим вероятность искомого события:

$$P(A)=\frac{M_1+M_2+M_3}{N}=\frac{(1323+630+1890)}{376\,992}\approx 0{,}0102.$$

Ответ: В наборе из пяти карт будут точно два короля, одна дама и одна карта пиковой масти с вероятностью $0{,}0102$.